6. INTEGRALES DE LINEA

6.1. Integrales de línea de campos vectoriales

Campos vectoriales

Un **campo o función vectorial** es una aplicación $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.
En los casos particulares $n = 2, 3$ se usará la notación:

$$n = 2 \implies F(x, y) = (P(x, y),\, Q(x, y)) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$
$$n = 3 \implies F(x, y, z) = (P(x, y, z),\, Q(x, y, z),\, R(x, y, z)) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

y, en general:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\, f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\, \ldots,\, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

Integral de línea de un campo vectorial

Sea $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ una curva (simple y suave a trozos) parametrizada por $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, y sea $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con $\gamma \subset D \subset \mathbb{R}^n$, un campo vectorial. Se define la **integral de línea** de F sobre γ como:

$$\int_\gamma F\, ds = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt$$

siempre que esta integral exista (como integral propia o impropia). El símbolo de producto "$\cdot$" indica producto escalar

Notación

1. Cuando la curva γ es cerrada, la integral se representa: $\oint_\gamma F\, ds$

2. Si $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ y $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, entonces:

$$\int_\gamma F\, ds = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n f_i(\alpha(t)) x_i'(t) \right) dt = \int_a^b \left(f_1 x_1' + f_2 x_2' + \ldots + f_n x_n' \right) dt$$

y la integral se suele representar por: $\int_\gamma F\, ds = \int_\gamma f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2 + \ldots + f_n\, dx_n$.
En los casos $n = 2$ y $n = 3$ sería:

$$\int_\gamma P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \qquad \text{y} \qquad \int_\gamma P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$$

Ejemplos

1. Calcula la integral de línea de $F(x, y) = \left(\sqrt{y},\, x^3 + y\right) = \sqrt{y}\mathbf{i} + (x^3 + y)\mathbf{j}$ a lo largo de las curvas: **(a)** γ_1 parametrizada por $\alpha(t) = (t,\, t)$, $0 \leq t \leq 1$; **(b)** γ_2 parametrizada por $\alpha(t) = (t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$. Extrae conclusiones del resultado obtenido.

2. Calcula $I = \int_\gamma x\, dx + y\, dy + z\, dz$, donde γ está parametrizada por $\alpha(t) = (t, \cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Propiedades

1. Linealidad: Si $\gamma \subset \mathbb{R}^n$, $F, G : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con $\gamma \subset D \subset \mathbb{R}^n$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_\gamma (\lambda F + \mu G)\, ds = \lambda \int_\gamma F\, ds + \mu \int_\gamma G\, ds$$

2. **Adición de caminos:** Si $\gamma_1, \gamma_2 \subset \mathbb{R}^n$ son dos caminos con $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{P\}$, siendo P el extremo de γ_1 y el origen de γ_2, y $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con $\gamma_1, \gamma_2 \subset D \subset \mathbb{R}^n$, entonces:

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} F\, ds = \int_{\gamma_1} F\, ds + \int_{\gamma_2} F\, ds$$

3. **Independencia de la parametrización:** La integral de línea no depende de la parametrización elegida para la curva, siempre que dicha parametrización conserve la orientación de la curva. Es decir, si $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ son dos parametrizaciones con la misma orientación de la misma curva $\gamma \subset \mathbb{R}^n$, y $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con $\gamma \subset D \subset \mathbb{R}^n$, entonces:

$$\int_{\gamma(\alpha)} F\, ds = \int_{\gamma(\beta)} F\, ds$$

4. **Dependencia de la orientación:** Si se invierte la orientación de la curva, la integral de línea cambia de signo:

$$\int_{-\gamma} F\, ds = -\int_{\gamma} F\, ds$$

Interpretación física

Sea $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ un campo de fuerzas (electromagnético, gravitacional, etc.) que en cada punto $\mathbf{x} \in D$ proporciona el vector $F(\mathbf{x})$ de la fuerza en ese punto, y sea $\gamma \subset D$ una curva con origen A y extremo B. Entonces, la integral de línea de F sobre γ es el trabajo necesario para llevar una partícula de masa unidad de A a B a lo largo γ.

Ejemplo

Sea $F(x,y,z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ un campo de fuerzas en $\mathbb{R}^3$, y sea γ la curva parametrizada por $\alpha(t) = (t^2, t, 1+t)$, $-1 \leq t \leq 2$. Calcula el trabajo necesario para mover una partícula de tamaño unidad a lo largo de γ.

Relación entre la integral de línea y la integral curvilínea

Sea $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ una curva y $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con $\gamma \subset D \subset \mathbb{R}^n$, un campo vectorial. La integral de línea de F sobre γ coincide con la integral curvilínea sobre γ de la proyección del campo F sobre la tangente a la curva en cada punto:

$$\int_{\gamma} F\, ds = \int_{\gamma} \mathrm{proy}_{\gamma} F\, ds$$

Ejercicios

1. Calcula el valor de las siguientes integrales de línea:
   - **(a)** $\oint_C x\, dy - y\, dx$, donde C es la circunferencia unidad centrada en el origen y orientada positivamente.
   - **(b)** $\int_\gamma x^2 z\, dx + y\, dy - dz$, donde γ es el trozo de la parábola $z = y^2$ (en el plano $x = 1$) que va desde $(1,-1,1)$ a $(1,2,4)$.
   - **(c)** $\int_{C_n} y\, dx + (3y^3 - x)dy + z\, dz$, donde C_n es la curva parametrizada por $\alpha(t) = (t, t^n, 1)$, $0 \leq t \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

1. (a) 2π; **(b)** $\frac{-3}{2}$; **(c)** $\frac{7-n}{4(n+1)}$.